Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

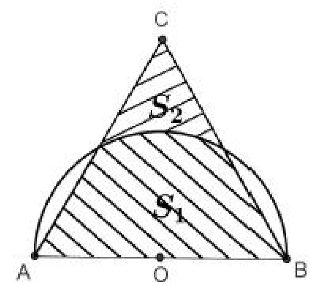
Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe
w dniu 21 stycznia 2017 r.

Tematyka: 1. Pole i obwód koła.
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Udowodnij, że liczba $3^{32} - 1$ jest podzielna przez 640.

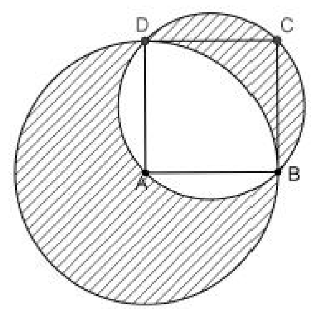
2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + 9 \geqslant ab + 3a + 3b$.

3. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie
$\left((a-b)^{-2} + (a+b)^{-2}\right) : \left(\dfrac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\right)^2$,
następnie wyznacz jego wartość dla $a = 1 - \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3} - 2$ i rozstrzygnij, czy jest ona większa niż 5.

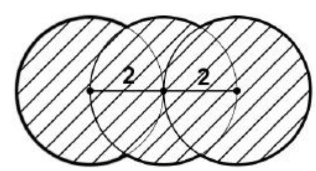


4. W trójkącie równobocznym o boku długości 10 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 5 (patrz rysunek). Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2.

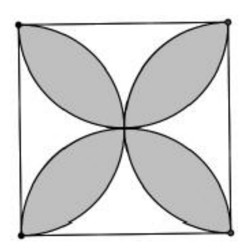
5. Wiedząc, że liczba $a + \dfrac{1}{a}$ jest całkowita, uzasadnij, że liczby
$a^2 + \dfrac{1}{a^2}$, $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ i $a^4 + \dfrac{1}{a^4}$ są całkowite.



6. Na kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 opisano okrąg, a następnie wykreślono okrąg o środku w punkcie A i promieniu AB.
Oblicz pole i obwód figury zacieniowanej na rysunku.



7. Z trzech okręgów o jednakowych promieniach równych 2 dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci ma środek w punkcie styczności (rysunek obok).
Oblicz pole i obwód otrzymanego w ten sposób obszaru.

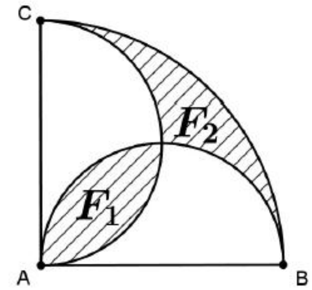


8. Uzasadnij, że dla każdej liczby x wartość wyrażenia $4x^2 - 12x + 14$ jest nie mniejsza niż 5.

9. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury (rysunek obok), jeżeli długość boku kwadratu jest równa 10, a łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach tego kwadratu.

10. Pewna liczba x ma taką własność, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Nie wyznaczając liczby x oblicz $x^2 + \frac{1}{x^2}$ oraz $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

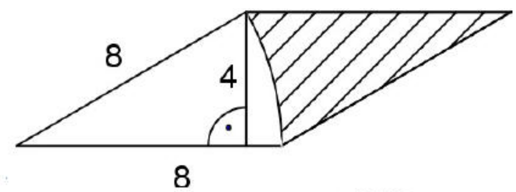
11. Uzasadnij, że dla każdej liczby x liczba $4x^2 - 4x + 11$ jest dodatnia.



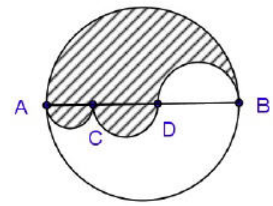
12. Czy liczba $2^{2014} + 5^{20}$ jest liczbą pierwszą?

13. Porównaj pola oraz obwody figur F_1 i F_2 wiedząc, że $\triangle ABC$ jest prostokątny, $|AB| = |AC| = 4$, łuki CA i AB są półokręgami, zaś łuk BC jest ćwiartką okręgu o środku A.

14. Czy liczba $2013 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right)$ jest kwadratem liczby naturalnej?



15. Oblicz pole zakreskowanego fragmentu rombu (rysunek obok).



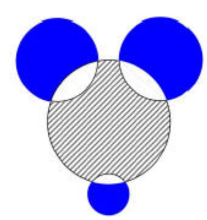
16. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC| = 6$, $|CD| = 8$, $|DB| = 10$. Na każdym z odcinków AC, CD i DB zbudowano półkole (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.

17. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:

a) $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$, $a = \frac{3}{4}$, $b = -0{,}25$.

b) $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, $a = -\frac{4}{5}$, $b = 0{,}6$,

c) $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$, $x = 0{,}6$, $y = -0{,}4$.

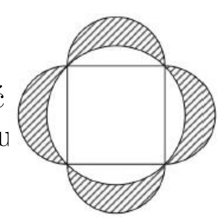


18. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (część największego koła). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.

19. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$,

b) $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)\left(1 + \frac{2}{5}\right)\left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$

jest liczbą pierwszą?



20. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek powyżej), gdzie długość jest równa 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - *„Liga Zadaniowa”* - zad. 52 - 81 na str. 29 - 31 i zad. 211 - 239 na str. 91 - 95 oraz *„Koło matematyczne w gimnazjum”* str. 16 - 21 i str. 133 - 150. **Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki** - *„Koło matematyczne w gimnazjum”* - zadania 596, 595, 538, 108, 114 oraz przykład 8 ze strony 19 i przykład 12 na stronie 140. Ponadto *„Liga Zadaniowa”* - zadania 222 i 226 na stronie 93.